C.E.S.T.I.

CENTRE D'ETUDES SUPERIEURES
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
3, rue F. Hainaut - 93407 St-OUEN Cédex
Tél. (1) 46 06 40 85

CONCOURS D'ENTREE 1986

MATHEMATIQUES II

Epreuve de contrôle de connaissances à orientation : MECANIQUE
Durée 4 heures

Le trièdre orthonormé direct $(O|\vec{I},\vec{j},\vec{k})$ est lié au repère (R).

Le trièdre orthonormé direct $(O_S|\vec{I}_S,\vec{J}_S,\vec{k})$ est lié au solide (S).

Le solide (S) est animé par rapport au repère (R) d'un mouvement (dit "plan sur plan") au cours duquel le plan $(O_S|\vec{I}_S,\vec{J}_S)$ reste en coïncidence géométrique avec le plan $(O|\vec{I},\vec{j})$:

$$\overrightarrow{OO_S} = r\,\vec{u}(\alpha) = r(\vec{I}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha)$$

$$\vec{I}_S = \vec{u}(\gamma) = \vec{I}\cos\gamma + \vec{j}\sin\gamma$$

$$\vec{J}_S = \vec{u}(\gamma + \tfrac{\pi}{2}) = -\vec{I}\sin\gamma + \vec{j}\cos\gamma$$

On posera : $\vec{u}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\vec{I}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha$.

Soit O'_S le point lié à (S) tel que $\overrightarrow{O_SO'_S} = h\,\vec{J}_S$ (h mesure positive d'une longueur, indépendante du temps).

On impose dans tout le problème que les longueurs des bi-points $\overrightarrow{OO_S}$ et $\overrightarrow{OO'_S}$ aient pour somme 3h :

$$OO_S + OO'_S = 3h$$

Soit (e) la base $[\vec{u}(\alpha), \vec{u}(\alpha + \frac{\pi}{2}), \vec{k}]$.

On suppose dans tout le problème que $\gamma' - \alpha' \neq 0$.

Première partie : généralités

a) Exprimer r en fonction de α et γ [que l'on supposera généralement variables en fonction du temps t, et deux fois dérivables à dérivées respectives : (α',α''), (γ',γ'')].

On vérifiera que $r = \dfrac{4h}{k_1 - \sin(\gamma - \alpha)}$ où k_1 est un entier.

b) Exprimer par leurs composantes sur la base (e) le vecteur $\vec{v}$ vitesse de O_S relativement à (R) et le taux de rotation $\vec{\omega}$ de la base $(\vec{I}_S,\vec{J}_S,\vec{k})$ par rapport à la base $(\vec{I},\vec{j},\vec{k})$.

c) I désignant (lorsqu'il existe) le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan considéré, exprimer en fonction de $(\alpha,\gamma,\alpha',\gamma')$ les composantes des bi-points $\overrightarrow{O_SI}$ et $\overrightarrow{OI}$ sur la base (e).

d) On pose $\vec{\lambda} = [3 - \sin(\gamma-\alpha)]\vec{u}(\alpha) + \cos(\gamma-\alpha)\vec{u}(\alpha+\frac{\pi}{2})$; calculer $\vec{\mu} = \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$ par ses composantes sur (e). Calculer en fonction de $\sin(\gamma - \alpha)$ la valeur commune de $\vec{\lambda}^2$ et $\vec{\mu}^2$.

e) Exprimer $3h - r$ en fonction de h et $\sin(\gamma - \alpha)$.

Soit le vecteur $\vec{g} = \dfrac{\overrightarrow{OO'_S}}{3h - r}$. Que représente $\vec{g}$? Exprimer par leurs composantes sur la base (e) les vecteurs $\vec{g}$, $\vec{I}_S$ et $\vec{J}_S$, ainsi que les vecteurs $\vec{g} + \vec{u}(\alpha)$ et $\vec{g} - \vec{u}(\alpha)$. Exprimer $\vec{g} + \vec{u}(\alpha)$ et $\vec{g} - \vec{u}(\alpha)$ en fonction de $(\gamma - \alpha)$, $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$; traduire les propriétés ainsi découvertes.

f) Déterminer la trajectoire (Γ) et la vitesse $\vec{W}$ du point O par rapport au repère constitué du solide (S). Exprimer $\vec{W}$ par ses composantes sur la base (e) et vérifier que $\vec{W}$ est colinéaire à $\vec{\mu}$. Quelle est la norme de $\vec{W}$.

Deuxième partie : Cinématique

Premier cas d'étude : γ reste invariable ($\gamma = \gamma_0$)

a) Caractériser le mouvement de (S) par rapport à (R) et déterminer avec précision la trajectoire de O_S par rapport à (R).

Il peut être utile de faire intervenir le quatrième sommet du parallélogramme dont trois sommets sont O_S, O'_S et O.

b) Montrer que dans ce cas le vecteur $\vec{v}$ (défini à la question b, 1ère partie) est colinéaire à $\vec{\mu}$;
en tirer la conclusion qui s'impose concernant une propriété géométrique de la tangente à la trajectoire de O_S.

c) Comment déduit-on [de la trajectoire de O_S] la trajectoire par rapport à (R) de n'importe quel point lié à (S) (et en particulier O'_S).

T.S.V.P.

d) Quelle relation y a-t-il entre la vitesse de O_S par rapport à (R) et la vitesse de O par rapport au solide (S).

Deuxième cas d'étude : α reste nul : ($\alpha \equiv 0$).

1°) Etudier la trajectoire de O_S et la trajectoire de O'_S lorsque γ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

2°) Tracer la base et la roulante du mouvement de (S) par rapport à (R).

3°) a) Déterminer par ses composantes sur $(\vec{I},\vec{j})$ la vitesse $\vec{v}^{(R)}(I)$ [vitesse par rapport au repère (R) du centre instantané de rotation I]; même question pour la vitesse $\vec{v}^{(S)}(I)$ de ce même point par rapport au repère constitué du solide (S).

b) Déterminer par ses composantes sur $(\vec{I},\vec{j})$ le vecteur $\vec{\Delta}$ défini comme différence entre les accélérations de I par rapport aux repères (R) et (S)

$$\vec{\Delta} = \vec{\gamma}^{(R)}(I) - \vec{\gamma}^{(S)}(I).$$

Troisième cas d'étude : $\gamma = 2\alpha$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Etudier la trajectoire de O_S

Troisième partie : Dynamique du mouvement de (S) par rapport au repère (R) supposé galiléen

On donne : la masse m de (S)

le centre d'inertie G de (S) situé en O_S

le moment d'inertie C de (S) par rapport à l'axe $(O_S|\vec{z})$

On suppose que :

- d'une part, le plan matérialisé $(O_S|\vec{I}_S,\vec{j}_S)$ peut se déplacer sans frottement sur le plan matérialisé $(O|\vec{I},\vec{j})$,
- d'autre part, la condition $OO_S + OO'_S = 3h$ est réalisée en appliquant sur (S) en O_S et O'_S respectivement les forces $-F\,\vec{u}(\alpha)$ et $-F\,\vec{g}$.

En plus de ces deux forces (dites de liaison et de même norme inconnue), le solide (S) est soumis de l'extérieur à un torseur connu dont on exprime les éléments de réduction en O par

$$\vec{s} = X\,\vec{\lambda} + Y\,\vec{\mu} + Z\,\vec{z} \quad ; \quad \vec{M}_O = L\,\vec{\lambda} + M\,\vec{\mu} + N\,\vec{z}$$

1°) a) Déterminer par ses composantes sur (e) l'accélération $\vec{\gamma}$ de G par rapport à (R). On explicitera j_1 et j_2 définis par

$$\vec{\gamma} = 4h[j_1\,\vec{u}(\alpha) + j_2\,\vec{u}(\alpha + \tfrac{\pi}{2})]$$

b) Ecrire l'équation vectorielle qui traduit le théorème fondamental exprimant le mouvement de G.

c) Déduire du résultat précédent l'expression de Y en fonction de $(\alpha,\gamma,\alpha',\gamma',\alpha'',\gamma'')$ (indépendamment de F).

2°) a) Exprimer la composante sur $\vec{k}$ du moment dynamique de (S) au point O.

b) Par application de l'équation issue du principe fondamental dite "équation du moment en O", écrire l'expression de N en fonction de $(\alpha,\gamma,\alpha',\gamma',\alpha'',\gamma'')$.

NOTE : Cette épreuve ne tient aucun compte des programmes actuels (math ou physique) des classes de Math.Sup, Math.Spé.